

(平 31 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

の $x > 0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ.

(2) a を $a \neq 1$ をみたす正の実数とする. 曲線 $y = e^x$ と曲線 $y = x^a$ ($x > 0$) が共有点 P をもち, さらに点 P において共通の接線をもつとする. 点 P の x 座標を t とするとき, a と t の値を求めよ.

(3) a と t を (2) で求めた実数とする. x を $x \neq t$ をみたす正の実数とすると, e^x と x^a の大小を判定せよ.

2. $|\overrightarrow{AB}| = 2$ をみたす $\triangle PAB$ を考え、辺 AB の中点を M 、 $\triangle PAB$ の重心を G とする。以下の問に答えよ。

(配点 30 点)

- (1) $|\overrightarrow{PM}|^2$ を内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を用いて表せ。
- (2) $\angle AGB = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の値を求めよ。
- (3) 点 A と点 B を固定し、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき、 $\angle ABG$ の最大値を求めよ。ただし、 $0 < \angle ABG < \pi$ とする。

3. n を 2 以上の整数とする. 2 個のさいころを同時に投げるとき, 出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) P_2, P_3, P_4 を求めよ.

(2) $n \geq 36$ のとき, P_n を求めよ.

(3) $P_n = \frac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ.

4. 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする.

$$1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4, \dots$$

すなわち, $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4$ で, 4 以上の自然数 n に対し, $a_n = a_{n-3}$ とする. この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) S_n を求めよ.
- (2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ.
- (3) どのような自然数 k に対しても, $S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ.

5. 媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = (1 + \cos t) \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を C とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $\frac{dy}{dx}$ および $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ.
- (2) C の凹凸を調べ, C の概形を描け.
- (3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ.