(平 30 前)

数　　学

(理　科　系)

(1 ～ 5 ページ)

・ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学(理科系)　150 点

1. tを$0 < t < 1$を満たす実数とする．OABCを1辺の長さが1の正四面体とする．辺OAを$1-t : t$に内分する点をP, 辺OBを$t : 1-t$に内分する点をQ, 辺BCの中点をRとする．また$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$とする．以下の問に答えよ．

(配点30点)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{QR}}$を$t$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$のとき, tの値を求めよ．

(3) tが(2)で求めた値をとるとき, $\triangle\mathrm{PQR}$の面積を求めよ．

2. k を 2 以上の整数とする．また

$$f(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $x > 0$ において，関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を満たすとき，$x_n > 1$ を示せ．

(3) (2) の数列 $\{x_n\}$ に対し，

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ．また $\lim_{n \to \infty} x_n$ を求めよ．

3. さいころを3回ふって, 1回目に出た目の数をa, 2回目と3回目に出た目の数の和をbとし, 2次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots\cdots(*)$$

を考える. 以下の問に答えよ. (配点30点)

(1) $(*)$ が$x = 1$を解にもつ確率を求めよ.

(2) $(*)$ が整数を解にもつとする. このとき$(*)$の解は共に正の整数であり, また少なくとも1つの解は3以下であることを示せ.

(3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ.

4. 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ3次式で，3次の係数は1，定数項は -3 とする．方程式 $f(x)=0$ は，1と虚数 α, β を解にもつとし，α の実部は1より大きく，α の虚部は正とする．複素数平面上で $\alpha, \beta, 1$ が表す点を順に A, B, C とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) α の絶対値を求めよ．

(2) θ を α の偏角とする．$\triangle$ABC の面積 S を θ を用いて表せ．

(3) S を最大にする θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ．

5. 座標空間において，Oを原点とし，A$(2, 0, 0)$，B$(0, 2, 0)$，C$(1, 1, 0)$とする．△OABを直線OCの周りに1回転してできる回転体をLとする．以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) 直線OC上にない点P(x, y, z)から直線OCにおろした垂線をPHとする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$と$\overrightarrow{\mathrm{HP}}$を$x, y, z$の式で表せ．

(2) 点P(x, y, z)がLの点であるための条件は

$$z^2 \leqq 2xy \text{ かつ } 0 \leqq x + y \leqq 2$$

であることを示せ．

(3) $1 \leqq a \leqq 2$とする．Lを平面$x = a$で切った切り口の面積$S(a)$を求めよ．

(4) 立体$\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$の体積を求めよ．