

(平 31 前)

# 数 学

(文 科 系)

(1 ～ 3 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙(2 ～ 3 枚目)は下書き用紙である。

**注意** 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(文科系) 75 点

1.  $a, b, c$  を実数とし,  $a \neq 0$  とする. 2 次関数  $f(x)$  を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

で定める. 曲線  $y = f(x)$  は点  $\left(2, 2 - \frac{c}{2}\right)$  を通り,

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{9}{2}$$

をみたすとする. 以下の問に答えよ. (配点 25 点)

- (1) 関数  $f(x)$  を  $a$  を用いて表せ.
- (2) 点  $(1, f(1))$  における曲線  $y = f(x)$  の接線を  $\ell$  とする. 直線  $\ell$  の方程式を  $a$  を用いて表せ.
- (3)  $0 < a < \frac{1}{2}$  とする. (2) で求めた直線  $\ell$  の  $y \geq 0$  の部分と曲線  $y = f(x)$  の  $x \geq 0$  の部分および  $x$  軸で囲まれた図形の面積  $S$  の最大値と, そのときの  $a$  の値を求めよ.

**2.** 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を  $\{a_n\}$  とする.

$$1, 3, 4, 1, 3, 4, 1, 3, 4, \dots$$

すなわち,  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4$  で, 4 以上の自然数  $n$  に対し,  $a_n = a_{n-3}$  とする. この数列の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする. 以下の問に答えよ. (配点 25 点)

- (1)  $S_n$  を求めよ.
- (2)  $S_n = 2019$  となる自然数  $n$  は存在しないことを示せ.
- (3) どのような自然数  $k$  に対しても,  $S_n = k^2$  となる自然数  $n$  が存在することを示せ.

**3.**  $|\overrightarrow{AB}| = 2$  をみたす  $\triangle PAB$  を考え, 辺  $AB$  の中点を  $M$ ,  $\triangle PAB$  の重心を  $G$  とする. 以下の問に答えよ.

(配点 25 点)

- (1)  $|\overrightarrow{PM}|^2$  を内積  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  を用いて表せ.
- (2)  $\angle AGB = \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  の値を求めよ.
- (3) 点  $A$  と点  $B$  を固定し,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}$  をみたすように点  $P$  を動かすとき,  $\angle ABG$  の最大値を求めよ. ただし,  $0 < \angle ABG < \pi$  とする.