（平 31 後）

数　　　学

（理　科　系）

（1 ～ 5 ページ）

・ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　150 点

1. $m,\ n$ を $0 < m < n$ をみたす整数とする．$\alpha,\ \beta$ を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $m = \tan\alpha,\ n = \tan\beta$ をみたす実数とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $\tan\dfrac{7\pi}{12}$ の値を求めよ．

(2) $\alpha + \beta > \dfrac{7\pi}{12}$ であることを示せ．

(3) $\tan(\alpha+\beta)$ が整数となるような組 (m, n) をすべて求めよ．

2. 連立不等式

$$y \geqq 0, \quad y^2 - 2xy + 2x^2 - 1 \leqq 0$$

が表す xy 平面上の領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を D とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 不等式 $x - \sqrt{1 - x^2} \geqq 0$ を解け．

(2) 不等式 $x + \sqrt{1 - x^2} \geqq 0$ を解け．

(3) t を $-1 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数とする．xy 平面上の点 $(t, 0)$ を通り x 軸と垂直な平面による D の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，この平面と D の共通部分がない場合は $S(t) = 0$ とする．

(4) D の体積 V を求めよ．

3. N を 10 以上の整数とする．あたりが 1 本，はずれが 2 本の合計 3 本からなるくじがある．このくじを用いて次のようなゲームを考える．くじを引いて，あたりかはずれかを確認し，引いたくじをもとに戻す試行をくり返す．はずれを引いた回数が合計 3 回になるか，くじを引いた回数が合計 N 回になった時点でゲームを終了する．終了時までにあたりを引いた回数を m として，ゲームの得点を $m \leqq 3$ のとき 0 点，$m \geqq 4$ のとき $m-3$ 点とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) 得点が 0 点となる確率 p_0 を求めよ．

(2) n を $1 \leqq n \leqq N-6$ をみたす整数とする．得点がちょうど n 点となる確率 p_n を求めよ．

(3) $1 \leqq n \leqq N-6$ をみたす整数 n に対し，(2) で求めた p_n を用いて $a_n = np_n$ とおく．$1 \leqq n \leqq N-7$ のとき，次の不等式を示せ．

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{14}{15}$$

(4) (3) の a_n に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N-6} a_n < 1$ であることを示せ．

4. 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ は次の関係式をみたすとする.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-t)g(t)dt \\ g(x) &= (2-x)e^{-x} - \pi\sin(\pi x) + 2f'(1) + 2 \end{aligned}$$

以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $f'(1)$ の値を求めよ.

(2) x を $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数とするとき,

$$x^2 - \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 \leqq f(x) \leqq x^2$$

であることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{f(x)}{x\sin x}$ を求めよ.

5. 2つの科目XとYの試験を受けた3人の生徒の得点と，それぞれの科目の得点の平均値と標準偏差を以下のとおりとする．

	生徒1	生徒2	生徒3	平均値	標準偏差
科目X	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}$	s_x
科目Y	y_1	y_2	y_3	$\overline{y}$	s_y

ただし，$s_x \neq 0$ かつ $s_y \neq 0$ とする．科目Xと科目Yの得点の相関係数 r は

$$r = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(y_i - \overline{y})^2}}$$

で与えられる．

座標空間内に3点 $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(x_1,x_2,x_3)$，$\mathrm{B}(y_1,y_2,y_3)$ をとる．Oを通り，方向ベクトルが $(1,1,1)$ の直線を ℓ とする．ℓ 上の点Pを $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と ℓ が垂直になるようにとり，ℓ 上の点Qを $\overrightarrow{\mathrm{QB}}$ と ℓ が垂直になるようにとる．以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) 点P，点Qの座標と内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QB}}$ を $\overline{x}$，$\overline{y}$，s_x，s_y，r を用いて表せ．

(2) $a = \dfrac{|\overline{x} - \overline{y}|}{s_y}$ とおくとき，$\cos\angle\mathrm{BPA}$ を a と r を用いて表せ．

(3) 点Aと直線 ℓ を含む平面を α とする．平面 α 上の点Cを $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となるようにとる．点Bは α 上にないとし，α 上の点Kを $\overrightarrow{\mathrm{KB}}$ と α が垂直になるようにとる．科目Xと科目Yの得点の相関係数 r が $0 < r < \dfrac{s_x}{s_y}$ をみたすとき，点Kは線分QC上にあることを示せ．