

(平 30 後)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. a, b を $0 \leq a < b \leq 1$ を満たす実数とし、点 A, B の座標をそれぞれ $(a, 1 - a^2)$, $(b, 1 - b^2)$ とする. また原点を O, 点 $(0, 1 - a^2)$, $(a, 1 - b^2)$, $(a, 0)$, $(b, 0)$ をそれぞれ C, D, E, F とする. 長方形 COEA と長方形 DEFB の面積の和を S とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) S を a, b で表せ.

(2) b の値を固定し, a の値のみを変化させるとき, S が最大となる a を b の式で表せ.

(3) a, b の値をともに変化させるとき, S の最大値を M とおく. M^2 を求め, $S < \frac{1}{2}$ を示せ.

2. $f(x) = \frac{2e^{3x}}{e^{2x} + 1}$ とおく. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $a < b$ ならば $f(a) < f(b)$ であることを示せ. また $f(\log \sqrt{3})$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく.

$$\int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} g(x) dx$$

を求めよ.

3. n を自然数とする. $A_n = 2^n + n^2$, $B_n = 3^n + n^3$ とおく. A_n を 3 で割った余りを a_n とし, B_n を 4 で割った余りを b_n とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $A_{n+6} - A_n$ は 3 で割り切れることを示せ.
- (2) $1 \leq n \leq 2018$ かつ $a_n = 1$ を満たす n の個数を求めよ.
- (3) $1 \leq n \leq 2018$ かつ $b_n = 2$ を満たす n の個数を求めよ.

4. $f_1(x) = x^2$ とし, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$f_{n+1}(x) = |f_n(x) - 1|$$

と定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ のグラフの概形をかけ.

(2) $0 \leq x \leq \sqrt{n-1}$ において

$$0 \leq f_n(x) \leq 1$$

であることと, $\sqrt{n-1} \leq x$ において

$$f_n(x) = x^2 - (n-1)$$

であることを示せ.

(3) $n \geq 2$ とする. $y = f_n(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_n とする. $S_n + S_{n+1}$ を求めよ.

5. $f(x) = \frac{3}{e^x + 1}$ とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 正の数 a で

$$\int_0^a f(t) dt = a$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ.

(2) (1) の a に対し, $\log 2 < b < a$ を満たす b をとる. $b \leq x \leq a$ において

$$0 \leq \int_0^a f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \leq f(b)(a - x)$$

を示せ.

(3) (1) の a に対し, $\log 2 < b < a$ を満たす b をとる. 数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = b$,

$$x_{n+1} = \int_0^{x_n} f(t) dt \quad (n \geq 1)$$

で定める. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

を示せ.