

(平 30 後)

# 数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

- ・ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

**1.**  $a, b$  を  $0 \leq a < b \leq 1$  を満たす実数とし, 点 A, B の座標をそれぞれ  $(a, 1 - a^2)$ ,  $(b, 1 - b^2)$  とする. また原点を O, 点  $(0, 1 - a^2)$ ,  $(a, 1 - b^2)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$  をそれぞれ C, D, E, F とする. 長方形 COEA と長方形 DEFB の面積の和を  $S$  とする. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

- (1)  $S$  を  $a, b$  で表せ.
- (2)  $b$  の値を固定し,  $a$  の値のみを変化させるととき,  $S$  が最大となる  $a$  を  $b$  の式で表せ.
- (3)  $a, b$  の値をともに変化させるととき,  $S$  の最大値を  $M$  とおく.  $M^2$  を求め,  $S < \frac{1}{2}$  を示せ.

**2.**  $f(x) = \frac{2e^{3x}}{e^{2x} + 1}$  とおく. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

(1)  $a < b$  ならば  $f(a) < f(b)$  であることを示せ. また  $f(\log \sqrt{3})$  を求めよ.

(2) 関数  $f(x)$  の逆関数を  $g(x)$  とおく.

$$\int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} g(x) dx$$

を求めよ.

**3.**  $n$  を自然数とする.  $A_n = 2^n + n^2$ ,  $B_n = 3^n + n^3$  とおく.  $A_n$  を 3 で割った余りを  $a_n$  とし,  $B_n$  を 4 で割った余りを  $b_n$  とする. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

- (1)  $A_{n+6} - A_n$  は 3 で割り切れることを示せ.
- (2)  $1 \leqq n \leqq 2018$  かつ  $a_n = 1$  を満たす  $n$  の個数を求めよ.
- (3)  $1 \leqq n \leqq 2018$  かつ  $b_n = 2$  を満たす  $n$  の個数を求めよ.

**4.**  $f_1(x) = x^2$  とし,  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$f_{n+1}(x) = |f_n(x) - 1|$$

と定める. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

(1)  $y = f_2(x)$ ,  $y = f_3(x)$  のグラフの概形をかけ.

(2)  $0 \leqq x \leqq \sqrt{n-1}$  において

$$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$$

であることと,  $\sqrt{n-1} \leqq x$  において

$$f_n(x) = x^2 - (n-1)$$

であることを示せ.

(3)  $n \geqq 2$  とする.  $y = f_n(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた図形の面積を  $S_n$  とする.  $S_n + S_{n+1}$  を求めよ.

**5.**  $f(x) = \frac{3}{e^x + 1}$  とする. 以下の間に答えよ. (配点30点)

(1) 正の数  $a$  で

$$\int_0^a f(t)dt = a$$

を満たすものがただ1つ存在することを示せ.

(2) (1) の  $a$  に対し,  $\log 2 < b < a$  を満たす  $b$  をとる.  $b \leqq x \leqq a$  において

$$0 \leqq \int_0^a f(t)dt - \int_0^x f(t)dt \leqq f(b)(a - x)$$

を示せ.

(3) (1) の  $a$  に対し,  $\log 2 < b < a$  を満たす  $b$  をとる. 数列  $\{x_n\}$  を  
 $x_1 = b$ ,

$$x_{n+1} = \int_0^{x_n} f(t)dt \quad (n \geqq 1)$$

で定める. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

を示せ.